REGIONE TOSCANA

Prodotto realizzato con il contributo della Regione Toscana nell'ambito dell'azione regionale di sistema

Laboratori del Sapere Scientifico

LA SIMILITUDINE

Sperimentazione in classe di un percorso didattico ideato dai Prof. Fontana, Gera, Giovannini

Livello scolare: 3° anno della scuola secondaria di primo grado (IC Barberino di Mugello)

Collocazione del percorso nel curricolo verticale di geometria della scuola secondaria di primo grado

I anno

- Gli enti fondamentali della geometria
- Le principali caratteristiche delle figure piane
- Il piano cartesiano e le simmetrie assiali

II anno

- Perimetro ed area delle principali figure piane
- Il teorema di Pitagora

III anno

- La similitudine
- Il cerchio
- Le figure solide

Obiettivi essenziali di apprendimento

- Acquisire il concetto di figure simili da un punto di vista prima operativo e poi formalizzato.
- Saper riconoscere figure simili tra loro.
- Saper calcolare uno o più elementi di una figura attraverso dati di una figura ad essa simile, anche in contesti reali.
- Saper mettere in relazione la rigidità della figura geometrica del triangolo, con particolari sue proprietà, in riferimento a triangoli simili tra loro.

Elementi salienti dell'approccio metodologico (1)

La metodologia applicata si basa su alcuni elementi fondamentali:

1. Didattica laboratoriale: il lavoro è stato progettato per essere «realizzato» essenzialmente dagli studenti, utilizzando materiale predisposto dagli insegnanti.
2. Alla fase di stimolo iniziale e di osservazione segue un lavoro individuale di verbalizzazione scritta, nel quale gli studenti devono cercare di scrivere le loro osservazioni e deduzioni
3. Alla lettura di alcune di queste verbalizzazioni, segue una discussione collettiva che consente il confronto tra le diverse ipotesi e l'emergere di una visione più completa del fenomeno osservato
4. Normalmente dalla discussione collettiva emergono degli elementi che portano i ragazzi a rivedere le proprie deduzioni individuali, che devono in questa fase essere corrette o ampliate.
5. L'insegnante, infine, effettua una sintesi finale nella quale può anche utilizzare le migliori produzioni degli alunni.

Elementi salienti dell’approccio metodologico (2)

- I momenti di esercizio sono sia individuali che di gruppo, a seconda degli obiettivi che si intendono perseguire:
- Nella fase di costruzione della conoscenza i ragazzi, specialmente quando si affrontano argomenti complessi, lavorano a piccoli gruppi (2-3 ragazzi).
- Nella fase di consolidamento di concetti o procedure, ma anche in quella di correzione di errori persistenti, i ragazzi inizialmente lavorano a coppie, inventando problemi o facendo esercizi di correzione reciproca di errori volutamente inseriti; poi lavorano individualmente.
- La fase di lavoro individuale, sia a casa che a scuola, ha l’obiettivo di mettere l’alunno da solo difronte ad una situazione problematica affinché sia possibile valutare, sia da parte dell’insegnante che dell’alunno stesso, l’effettiva acquisizione di conoscenze e competenze.

Materiali impiegati

- Fotocopie
- Quaderni
- Strumenti di disegno geometrico
- LIM
- Software di geometria dinamica (Geogebra)
- Software di lavoro sulla LIM (ActiveInspire)

Ambiente di lavoro

- Aula
- Laboratorio di Informatica

Tempo impiegato

- Messa a punto nel gruppo LSS: 8 ore
- Progettazione specifica nella classe: 12 ore
- Tempo scuola di sviluppo del percorso: 1 mese e mezzo (12-15 ore)
- Documentazione: 8 ore

Descrizione del percorso didattico

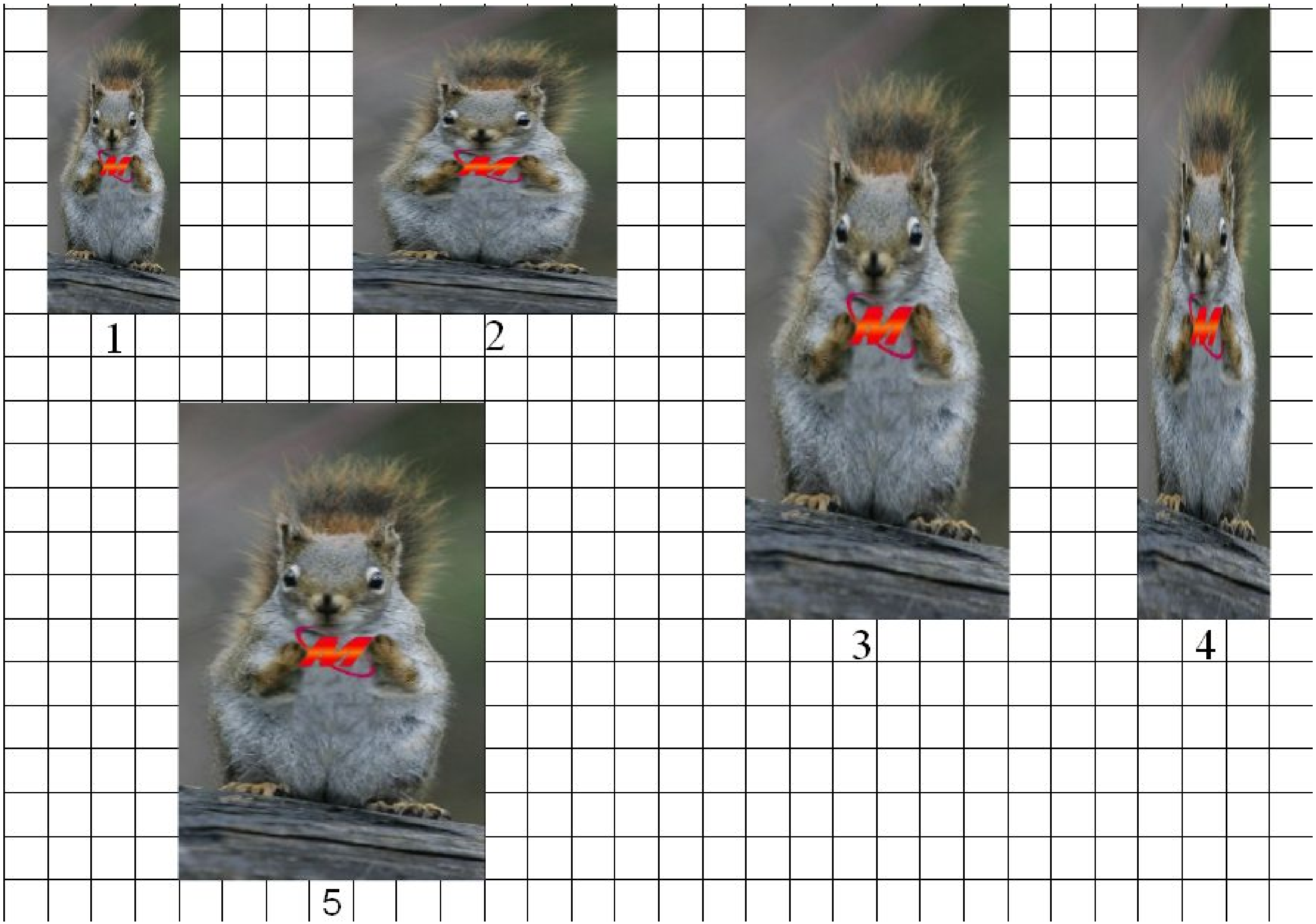
Dalla manipolazione delle foto un primo approccio alle figure geometriche simili

- Per avviare la discussione si propone ai ragazzi una serie di immagini preparate dall’insegnante: una originale (formato 3x7), il suo ingrandimento in scala 1:2, due in cui sia raddoppiato un lato e lasciato inalterato l’altro, una in cui la stessa quantità sia stata aggiunta ad entrambi i lati (Fig.1).

- Si chiede di confrontare la stessa immagine in queste 5 diverse situazioni e di scrivere le proprie osservazioni

- Attraverso la discussione si cerca di far emergere le somiglianze e le differenze, fino ad arrivare al concetto di ingrandimento e di deformazione e ad una definizione condivisa di figure simili.

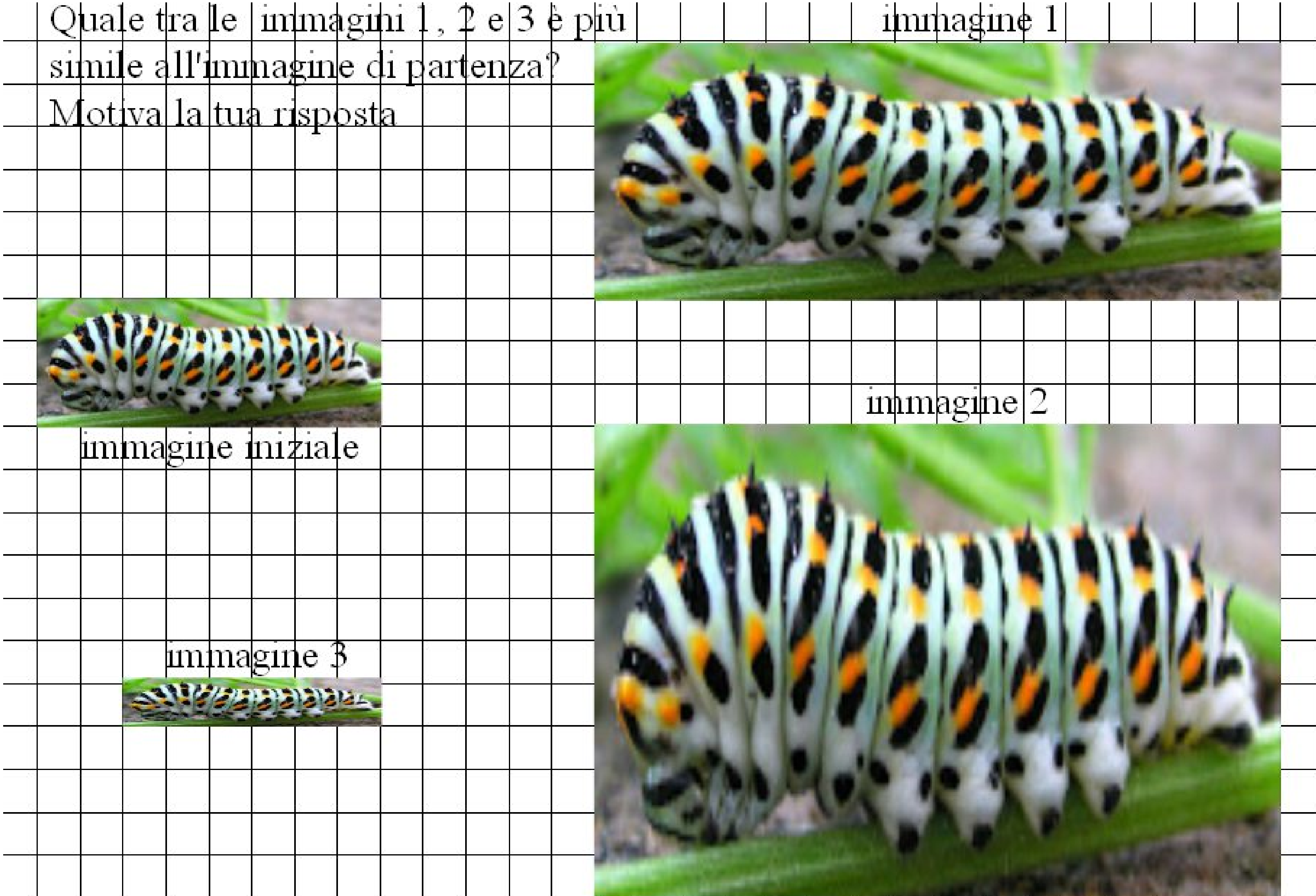
Fig.1



Lavoro individuale per il consolidamento del concetto di figure simili

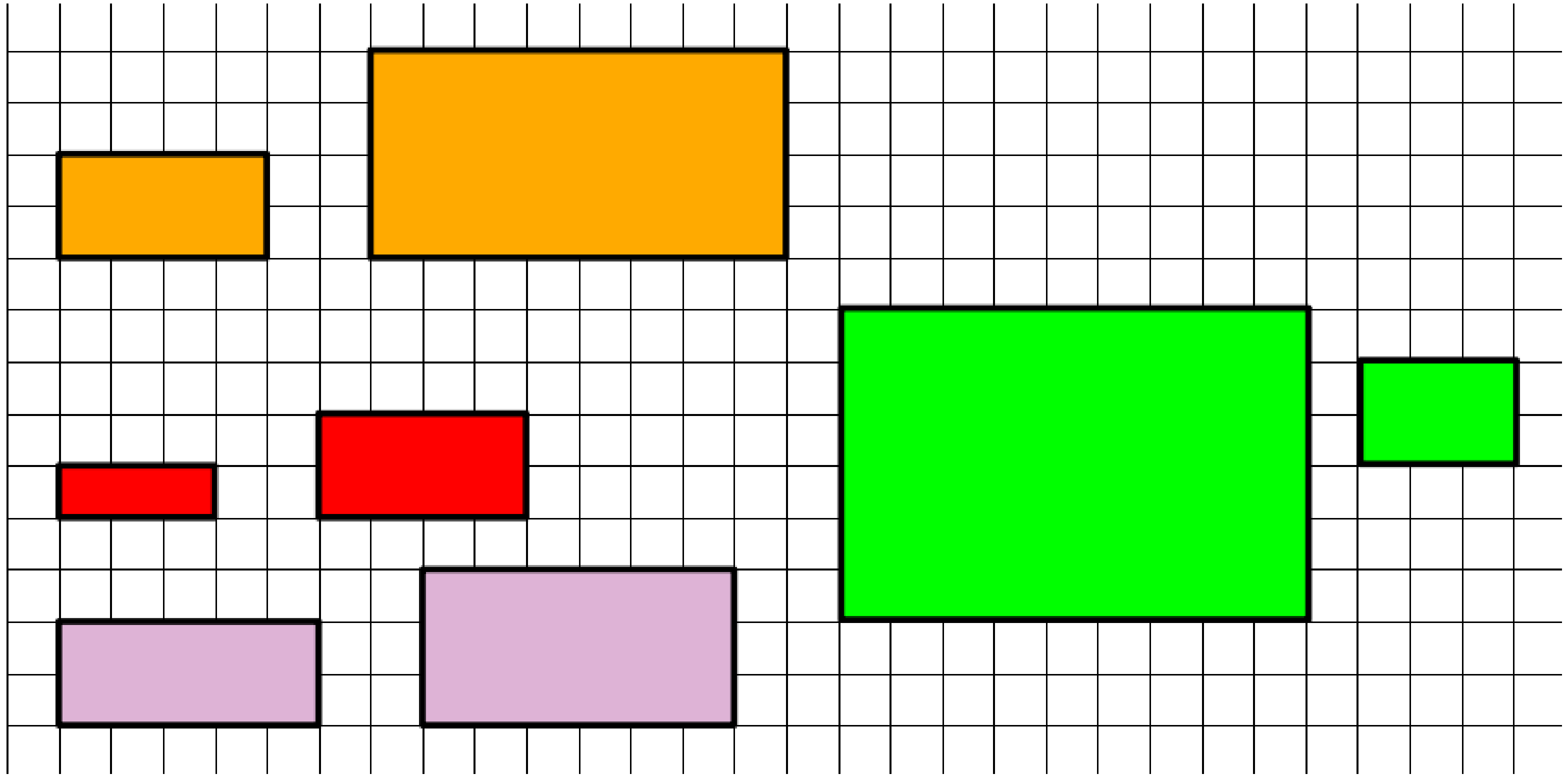
- Si ripropone quindi ai ragazzi una serie di immagini tra le quali, indicata l'immagine di partenza, i ragazzi debbano trovare l'immagine simile.
- Sono presenti immagini deformate in vario modo, tra le quali una in cui ad entrambe le dimensioni del rettangolo di partenza sia stato aggiunto lo stesso numero di quadretti.
- L'obiettivo di questo esercizio è portare i ragazzi a lavorare individualmente e a constatare che due rettangoli non sono simili se ad entrambe le dimensioni viene aggiunta la stessa quantità, ma lo sono solo se entrambe le dimensioni vengono moltiplicate o divise per lo stesso numero (Fig. 2).

Fig. 2


Quale tra le immagini 1, 2 e 3 è più simile all'immagine di partenza? Motiva la tua risposta
immagine 1
immagine 2
immagine iniziale
immagine 3

Dalle immagini alle figure geometriche

A questo punto si presentano ai ragazzi coppie di rettangoli tra le quali essi debbano individuare quelle costituite da rettangoli simili, chiedendo di motivare le proprie risposte (Fig. 3).

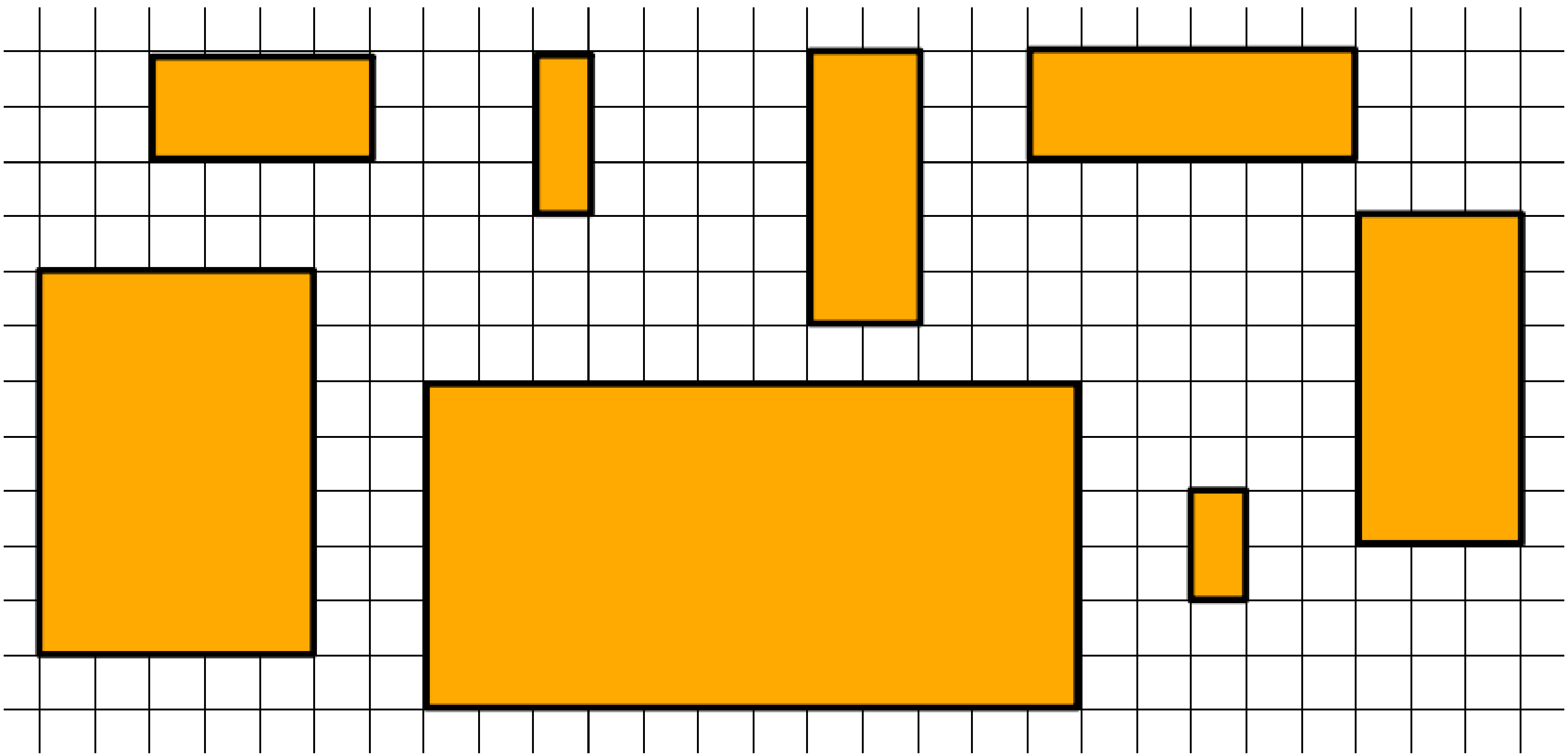


Il rapporto di similitudine

- Nella discussione generata dalla lettura delle verbalizzazioni scritte individuali, si cerca di portare i ragazzi a mettere in relazione due lati corrispondenti di rettangoli simili, e quindi a scrivere dei rapporti.
- Dovrebbe essere facile per loro osservare che il rapporto tra i lati corrispondenti è costante e per l’insegnante introdurre il concetto di rapporto di similitudine.
- Ogni ragazzo potrà ora provare a scrivere una propria definizione di rettangoli simili tra loro, fino ad arrivare ad una definizione condivisa dalla classe.

Esercizio per il consolidamento dei concetti emersi

Per verificare la comprensione dei concetti scaturiti dall'osservazione e dalla discussione, si propone un esercizio più complesso in cui tra tanti rettangoli sparsi si debbano individuare quelli tra loro simili (Fig. 4).

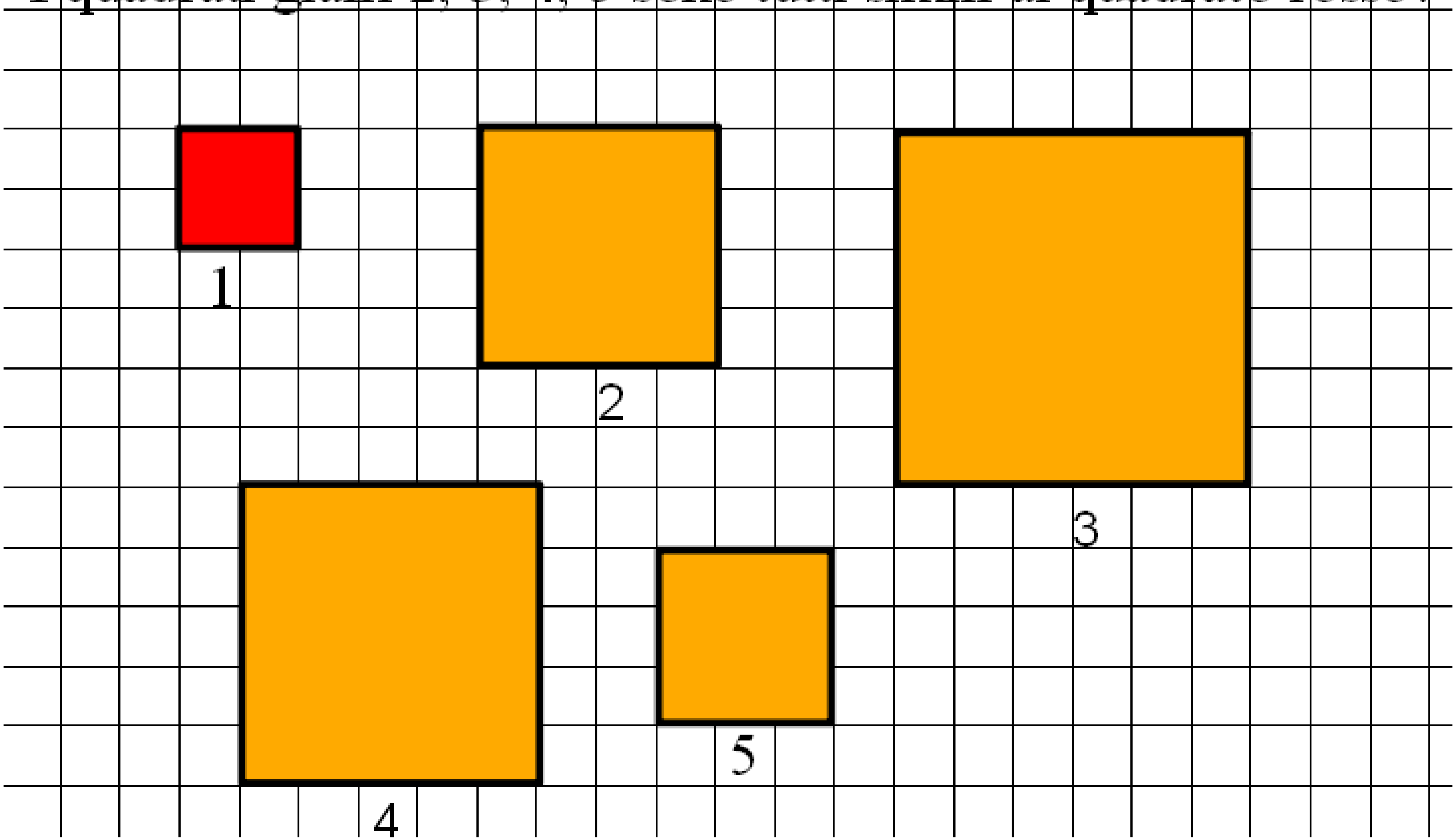


Un caso particolare: il quadrato.

- Come caso particolare del rettangolo, proponiamo ora all'attenzione dei ragazzi tanti quadrati e chiediamo quali tra essi sono simili al primo (Fig. 5).
- L'esercizio è predisposto in modo tale che i primi due quadrati abbiano il lato rispettivamente doppio e triplo del quadrato di partenza, per cui i ragazzi ci possono arrivare intuitivamente
- Per capire se gli altri due sono simili al primo, è necessario invece calcolare il rapporto di similitudine tra i lati dei quadrati che è rispettivamente di 2/3 e 2/5.
- La discussione che seguirà questa attività dovrebbe portare i ragazzi a dire che tutti i quadrati sono simili tra loro.

Fig. 5

I quadrati gialli 2, 3, 4, 5 sono tutti simili al quadrato rosso?



Gli angoli nelle figure simili: il rombo.

- Si propone un lavoro sul rombo per introdurre la necessità, affinché due figure siano simili, di avere, oltre ai lati corrispondenti in proporzione, angoli corrispondenti uguali.
- Consegniamo ai ragazzi una fotocopia con i seguenti 3 rombi: uno di lato 5cm, uno di lato 10cm ottenuto per ingrandimento del precedente, e quindi simile ad esso, l'ultimo con il lato di 10cm ma non simile (Fig. 6).
- Chiediamo ai ragazzi di individuare quali sono i rombi simili e di motivare, anche attraverso numeri o calcoli, la risposta.

Dalla lettura delle verbalizzazioni scritte dovrebbe emergere che anche se il rapporto tra i lati del rombo al centro con quelli degli altri due rombi è in entrambi i casi 1/2, solo il primo e il secondo rombo sono simili tra loro.

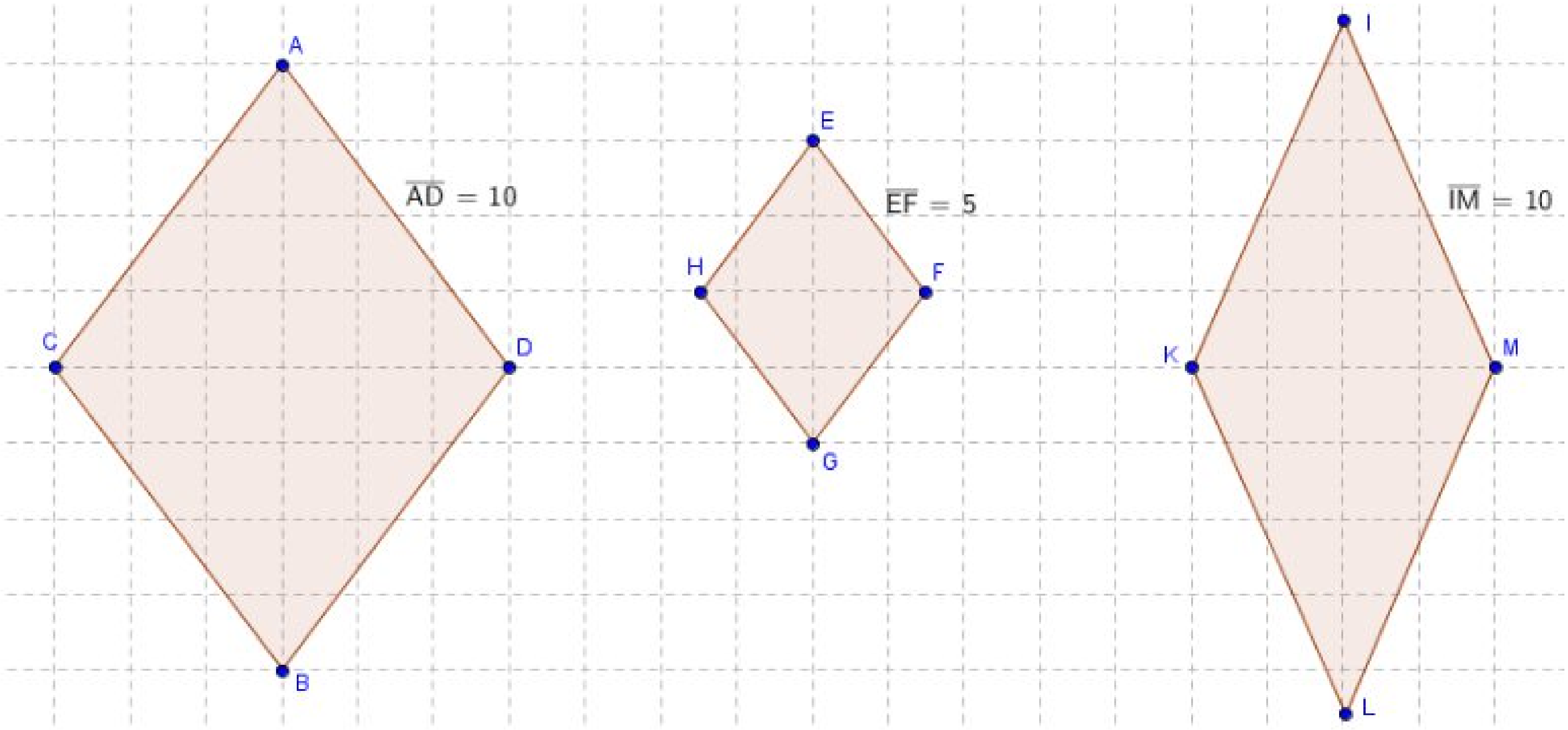


Fig. 6

- Dalla discussione collettiva dovrebbe scaturire che la differenza tra le due situazioni analizzate risiede nell’ampiezza degli angoli

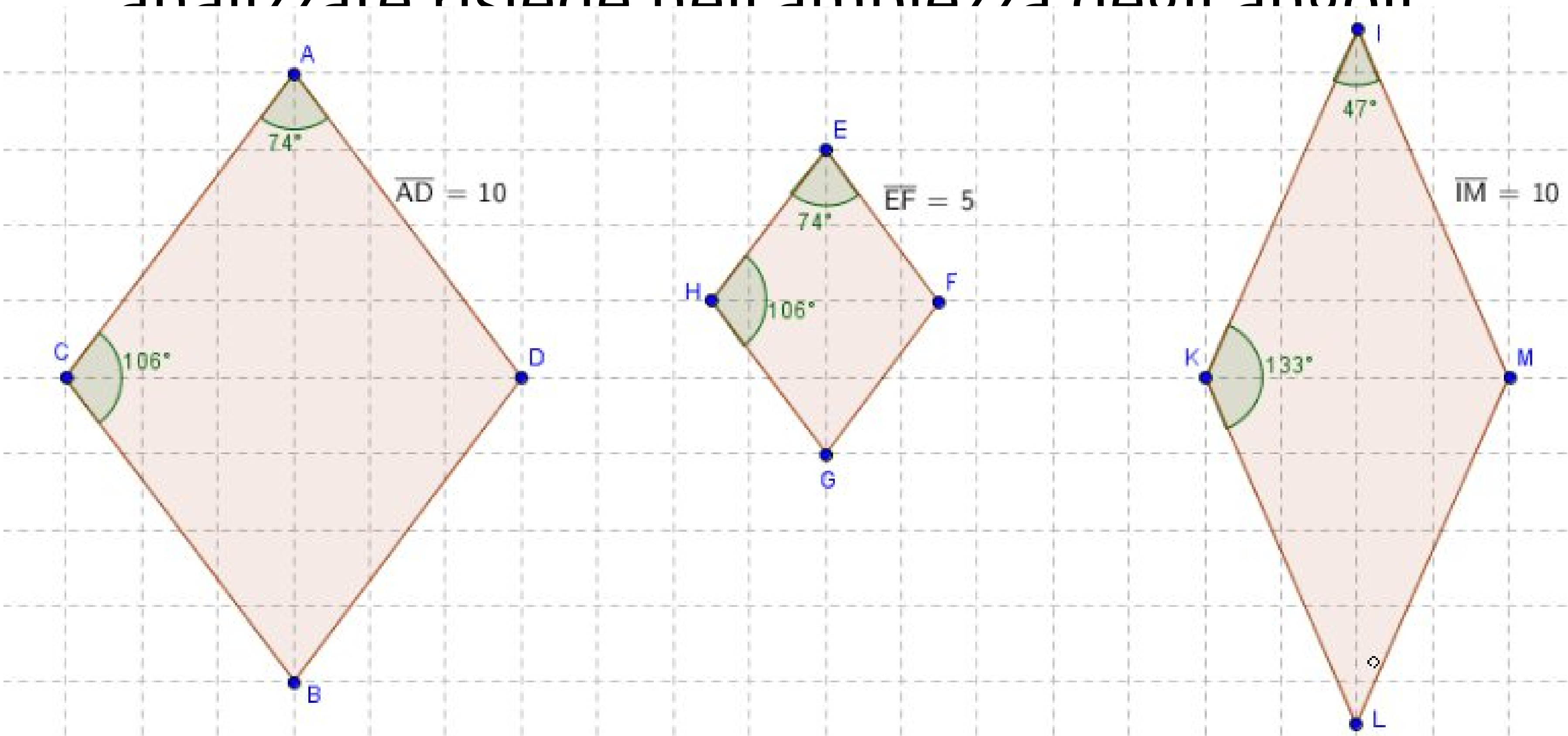


Fig. 7

Il rombo e gli angoli corrispondenti

- Si chiede quindi ai ragazzi di verbalizzare individualmente sul proprio quaderno quali possano essere le condizioni per le quali 2 rombi siano simili tra loro.
- Dalla discussione collettiva e dalla sintesi finale operata dall'insegnante, dovrebbe emergere la definizione di figure simili tra loro, cioè figure nelle quali gli angoli corrispondenti sono uguali e i lati corrispondenti sono in proporzione.

Confronto tra rombo, rettangolo e quadrato

- Si pone ai ragazzi la seguente domanda: come mai quando abbiamo determinato le condizioni necessarie affinché due quadrati o due rettangoli sono simili tra loro, si tenevano in considerazione soltanto i lati?
- Dalle risposte individuali e dalla discussione collettiva dovrebbe venir fuori che nel caso del rettangolo e del quadrato gli angoli sono sempre di 90° e quindi sempre uguali tra loro.

La similitudine dei triangoli 1: le implicazioni di una figura rigida

Il triangolo, essendo una figura rigida, ha la caratteristica che basta che i lati corrispondenti siano in proporzione affinché anche gli angoli corrispondenti siano uguali, e quindi i triangoli siano simili tra loro, e viceversa.

A seconda del grado di preparazione della classe, si può far disegnare ai ragazzi due triangoli, rispettivamente di lati 4cm, 8cm, 10cm e di lati 2cm, 4cm, 5cm con righello e compasso, oppure si può fornire una copia della Fig.8.

- Alla richiesta di definire se i due triangoli sono o meno simili e di motivare la risposta da un punto di vista matematico, i ragazzi dovrebbero calcolare il rapporto tra i lati corrispondenti, che risulterà uguale.
- Qualcuno probabilmente misurerà anche l’ampiezza degli angoli corrispondenti, che risulterà uguale.

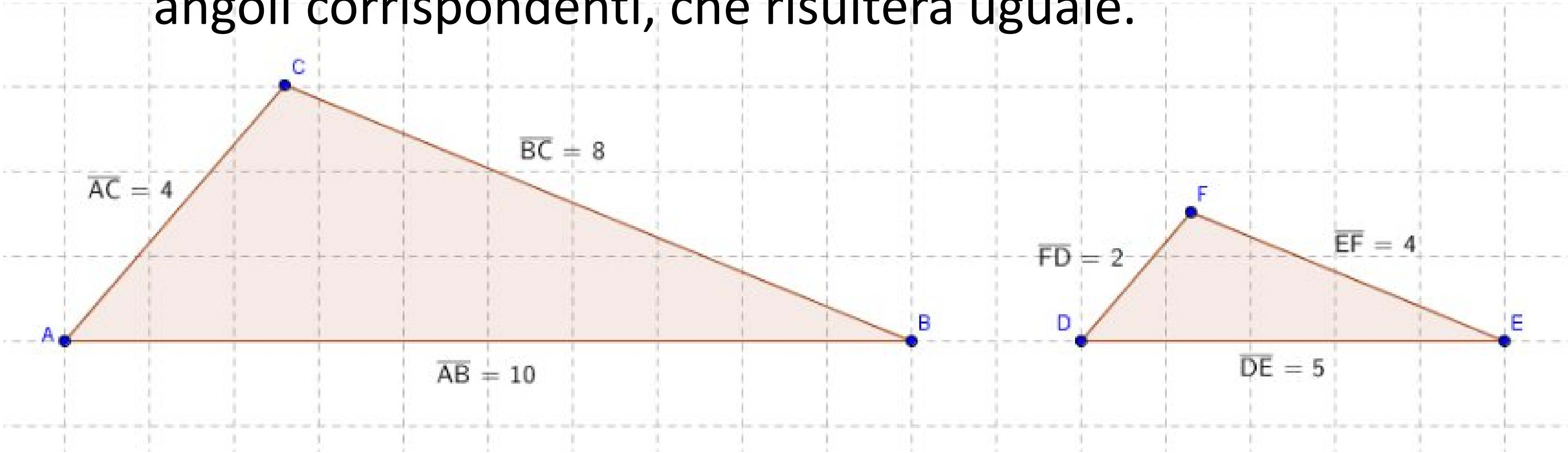


Fig. 8

- Al termine della lettura delle verbalizzazioni individuali, ciascun ragazzo, se non lo avesse già fatto, dovrà misurare l'ampiezza degli angoli (Fig.9).
- Dalla discussione collettiva dovrebbe quindi emergere che due triangoli con i lati corrispondenti in proporzione hanno anche gli angoli corrispondenti uguali e sono quindi simili tra loro.

Fig. 9

La similitudine dei triangoli 2

- Per completare il lavoro sul triangolo sarebbe opportuno ripetere il lavoro partendo da triangoli con angoli corrispondenti uguali.
- La procedura migliore sarebbe quella di far costruire i triangoli direttamente ai ragazzi, utilizzando righello e goniometro;
- Si fanno pertanto disegnare 2 triangoli, di base rispettivamente di 5cm e 10cm, e di angoli alla base di 37° e 53° di ampiezza.
- In questo modo, senza saperlo, i ragazzi costruiscono 2 triangoli rettangoli i cui lati appartengono a terne pitagoriche, in modo da facilitare la successiva misurazione dei lati e il loro confronto (Fig.10)

- Nel caso in cui non fosse possibile far eseguire direttamente ai ragazzi la costruzione dei triangoli, si potrà fornire loro una copia della Fig.10.
- Sarà opportuno comunque fornire una copia della Fig.10 anche a coloro che avessero costruito i triangoli, nel caso in cui la costruzione non fosse di buona qualità.

Fig. 10

- Alla richiesta di determinare se i due triangoli sono simili e di motivare la risposta anche da un punto di vista matematico, i ragazzi dovrebbero misurare i lati con il righello e calcolare il rapporto tra i lati corrispondenti.
- Dovrebbe pertanto risultare evidente che i lati corrispondenti sono in proporzione e che i triangoli sono simili.

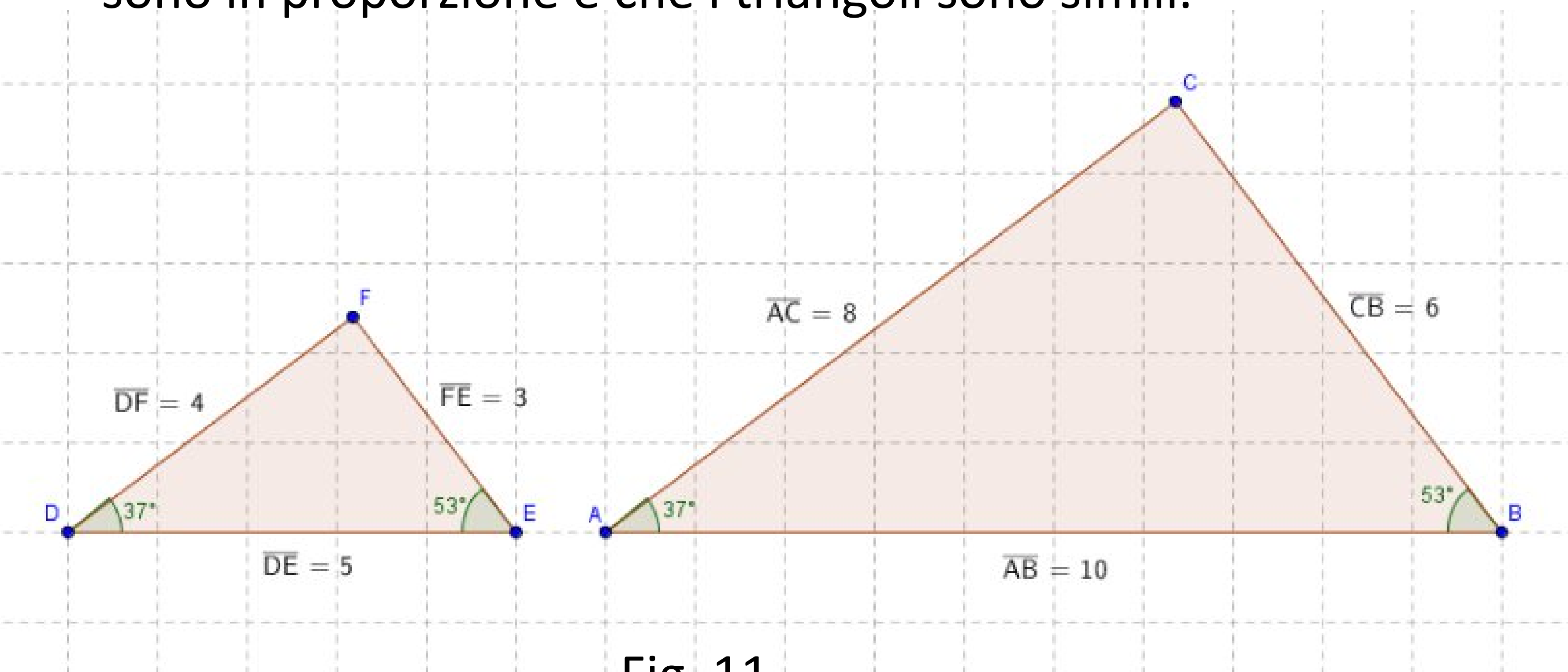


Fig. 11

La similitudine dei triangoli 3: considerazioni finali

- Si chiederà ora ai ragazzi di riflettere, individualmente o a piccoli gruppi, sul lavoro fatto sui triangoli e di ripercorrere, anche in maniera schematica, le due situazioni analizzate.
- L'obiettivo di questo lavoro è di far emergere che nei triangoli basta che una sola delle condizioni individuate nel rombo affinché due figure siano simili (lati corrispondenti in proporzione e angoli corrispondenti uguali) sia verificata, che anche l'altra automaticamente lo è e i triangoli sono quindi simili.

Il rapporto di similitudine e il rapporto tra perimetri ed aree di figure simili

- Per facilitare ai ragazzi la comprensione di quest’ultimo punto conviene lavorare su figure semplici come i rettangoli.
- Si chiede ai ragazzi di disegnare individualmente due rettangoli simili e con rapporto di similitudine pari a ½.
- Si chiede poi di calcolare e successivamente confrontare tra loro i perimetri e le aree dei due rettangoli disegnati.
- Mentre la coincidenza tra il rapporto di similitudine e il rapporto tra i perimetri dei due rettangoli simili è subito evidente a tutti i ragazzi, la relazione tra rapporto di similitudine e rapporto tra le aree di figure simili è meno intuitiva.

Per facilitare la comprensione di quest'ultimo punto, si può rappresentare alla lavagna una delle situazioni disegnate dai ragazzi e mostrare che il rettangolo simile di dimensioni minori entra 4 volte nel rettangolo simile di dimensioni maggiori (Fig. 12)

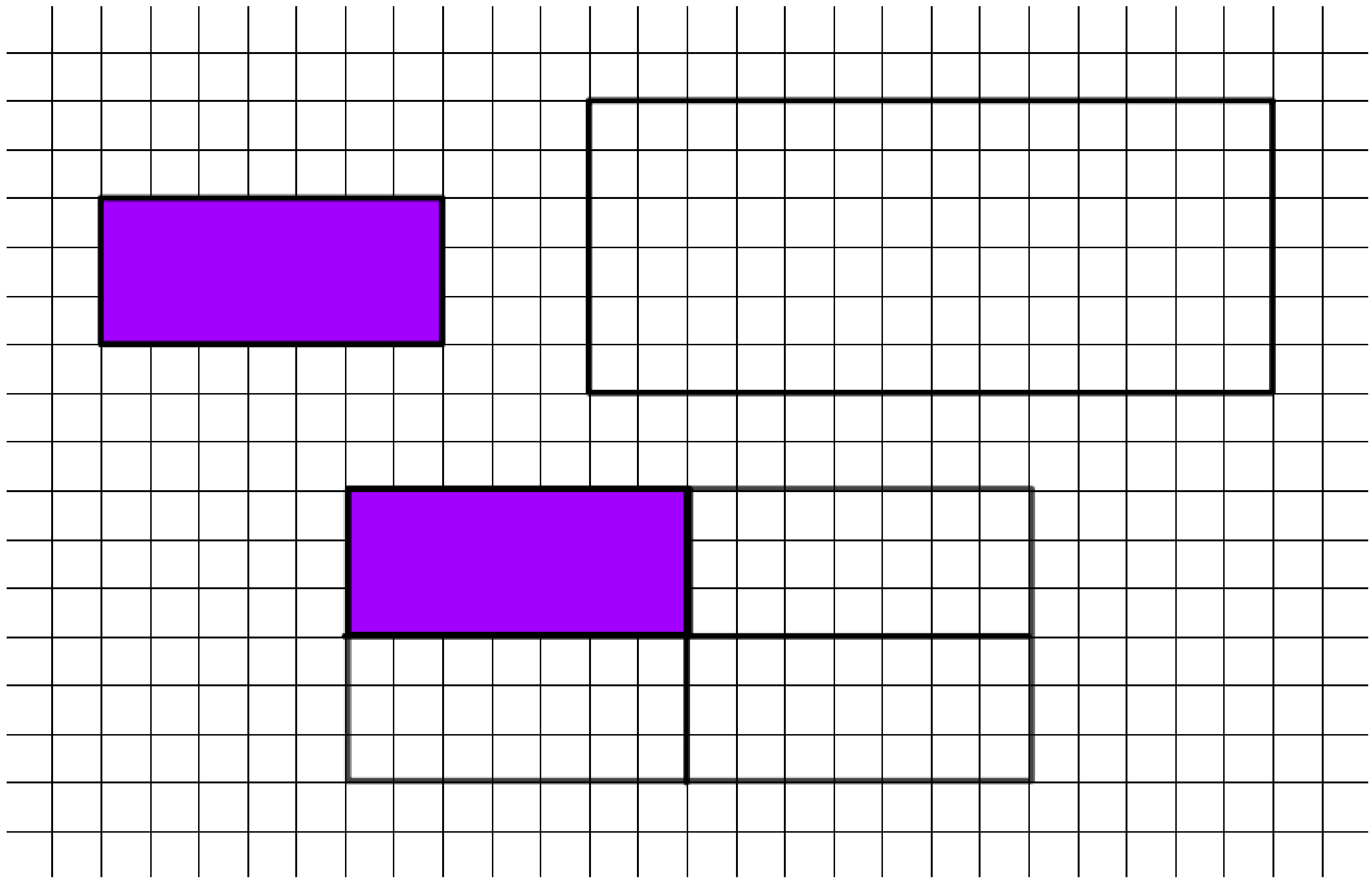


Fig. 12

- Per consolidare a livello individuale questo aspetto, è opportuno far disegnare ai ragazzi due rettangoli simili, con rapporto di similitudine pari a 1/3.
- Si chiede di calcolare il perimetro dei due rettangoli, il rapporto tra i perimetri e di confrontare quest'ultimo con il rapporto di similitudine.
- Si chiede infine di calcolare le due aree e il rapporto tra le aree e di provare a rappresentare tale rapporto anche da un punto di vista geometrico.
- Qualche alunno già a questo punto avrà trovato la relazione tra rapporto di similitudine e rapporto tra le aree.
- Per gli altri sarà opportuno far costruire una tabella contenente tutti i dati relativi alle coppie di rettangoli simili disegnati dai ragazzi, per poter confrontare contemporaneamente un ampio numero di casi.

Tabella per il confronto tra il rapporto di similitudine e il rapporto tra perimetri ed aree di figure simili

RETT 1		RETT 2			P(cm)			A(cm²)		
b	h	b	h	R. SIM	R1	R2	RAPP	R1	R2	R
3	1	9	3	1/3	8	24	1/3	3	27	1/9
5	2	15	6	1/3	14	42	1/3	10	90	1/9
4	2	12	6	1/3	12	36	1/3	8	72	1/9
3	2	9	6	1/3	10	30	1/3	6	54	1/9

Proposta di verifica

Cognome ....

Nome..

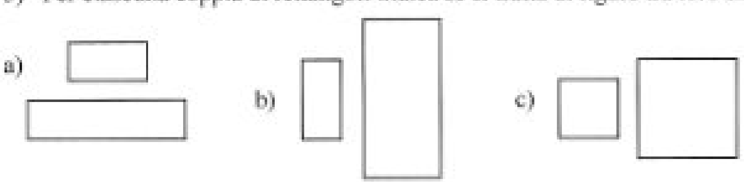
Classe.. **Data**..................................

1) Vero o falso?

Due figure sono simili quando hanno la stessa forma	V	F
I quadrati sono tutti simili tra loro	V	F
I rettangoli sono tutti simili	V	F
I rombi sono tutti simili	V	F
Le figure congruenti sono anche simili	V	F
Le figure simili sono anche congruenti	V	F

2) Scrivi quali sono le condizioni necessarie affinché due figure qualsiasi possano essere definite simili.

3) Per ciascuna coppia di rettangoli indica se si tratta di figure tra loro simili:



4) In un trapezio rettangolo il lato obliquo misura 8cm e la base maggiore 17cm. In un secondo trapezio simile al primo il lato obliquo misura 24cm. Quanto misura la base maggiore del secondo trapezio?

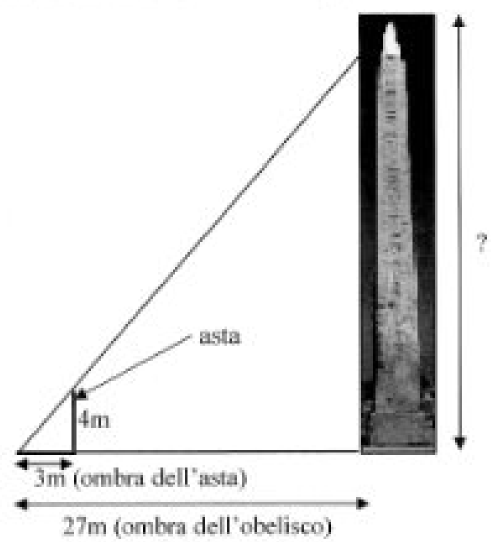
5) In un rombo un angolo misura 105° e il lato misura 24cm. Esso è simile ad un altro rombo il cui lato misura 16cm. Determina il rapporto di similitudine e l'ampiezza degli angoli del secondo rombo.

6) Un triangolo ha i lati che misurano 4cm, 5cm e 7cm. Un altro triangolo, simile al primo, ha il lato più lungo che misura 21cm. Determina i lati del secondo triangolo.

7) In un triangolo i lati misurano rispettivamente 15cm, 18cm e 21cm. Il perimetro di un triangolo simile al primo misura 135cm. Determina la lunghezza dei lati del secondo triangolo.

8) In due triangoli rettangoli simili due cateti corrispondenti misurano rispettivamente 3cm (primo triangolo) e 12cm (secondo triangolo). L'area del primo triangolo misura $28cm^2$. Determina l'area del secondo triangolo.

9) Si narra che Talete riuscì a calcolare l'altezza di un obelisco egizio piantando un'asta di lunghezza nota in prossimità dell'ombra proiettata dall'obelisco. Sfruttò la similitudine tra il triangolo avente come cateti l'obelisco e la sua ombra e il triangolo avente come cateti l'asta e la sua ombra. Osserva il disegno e calcola l'altezza dell'obelisco (indicata con "?").



Risultati della verifica

Item #	1	2	3	4	5	6	7	8	9	tot punti
punt. max	6	5	3	4	6	4	8	5	5	46
Alunno										
1	5	5	3	4	6	4	8	5	5	45
2	3	5	3	4	3	4	8	3	5	38
3	4		3	4	3	4	7	3	5	33
4	5	3	3	4	3	4	1		5	28
5	5	5	3	4	3	4	8	5	5	42
6	5	5	1	4	3	4	1		5	28
7	5	5	3	4	6	4	8	4	5	44
8	3	5	3	4	6	4	8	1	5	39
9	2	5	3	3		4			5	22
10	1		1	4	3	4			2	15
11	4	4	3	3	3	4	5	1	5	32
12	4		3		3	4	5		5	24
13	4	3	3	4	6	4		5	5	34
14	3	5	3	4	3	4				22
15	5	4	2	4	6	4	8	5	5	43
16	5		2	4		4	8		5	28
17	4	4	3	4	3	4	8	5	5	40
18	6	5	3	4	3	4	6		5	36
19	4	5	3	4	6	4	7		5	38
20	6	5	2	4		4		1	5	27
21	3	5	2	4	3	4	8	1		30
22	5	2	3	4	6	4	7	1	5	37
23	4	1	1	4	2				2	14
24	5	3	2	4		4				18

Analisi critica dei risultati (1)

- Dall’analisi dei risultati riportati in tabella risulta evidente che i primi 4 esercizi e l’esercizio numero 6 (domande più teoriche- esercizi da 1 a 3- e semplici problemi-esercizi 4 e 6) non hanno creato difficoltà ai ragazzi che hanno risposto in maniera positiva ed omogenea.
- Anche il calcolo del rapporto di similitudine nell’es.5 non ha creato difficoltà, mentre, nello stesso esercizio, solo 7 ragazzi su 24 hanno risposto correttamente alla domanda sugli angoli. Gli altri si sono divisi tra quelli che non hanno proprio svolto questa parte dell’esercizio, e quelli che hanno ricalcolato l’ampiezza degli angoli in base al rapporto di similitudine.

Analisi critica dei risultati (2)

- Prevedibilmente, l'esercizio 7, per risolvere il quale era necessario saper utilizzare la relazione tra rapporto di similitudine e rapporto tra i perimetri è stato affrontato e risolto in maniera corretta solo da una parte della classe.

- Destino simile, ma complessivamente peggiore, ha avuto l'esercizio 8, per risolvere il quale era necessario aver compreso la relazione tra rapporto di similitudine e rapporto tra le aree di figure simili, più complessa della precedente.

- L'esercizio numero 9, ripreso ed adattato da una vecchia prova INVALSI, ha messo a dura prova i ragazzi durante la verifica e ha richiesto una spiegazione aggiuntiva, dopo la quale il quesito è stato affrontato con successo.

Valutazione dell’efficacia del percorso didattico

- Dalle prove finali dei ragazzi e dalle osservazioni emerse durante il lavoro in classe, la valutazione del percorso che abbiamo effettuato è positiva.

- Il percorso, piuttosto articolato, anziché essere dispersivo, sembra aver portato ad una buona comprensione del concetto di similitudine e alle sue possibilità applicative.

- Gli errori nell’esercizio sugli angoli ma soprattutto la difficoltà interpretativa iniziale incontrata dai ragazzi nell’esercizio dell’INVALSI, mostrano però che è necessaria una maggiore attenzione nella preparazione degli esercizi da svolgere in classe e a casa.